CONCOURS 1975

OPTIONS M et P

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels, on désigne par T le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à trois, y compris le polynôme nul. On rappelle que la base canonique de T est formée des polynômes : $1, x, x^2, x^3$.

1° Soit quatre polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 de T, et quatre nombres réels a_1, a_2, a_3, a_4, tels que :

$$\forall i = 1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\ ,\quad \forall j = 1\,;\,2\,;\,3\,;\,4 : P_i(a_i) \neq 0, \text{ et } P_i(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j\,;$$

Montrer que la matrice de terme général $b_{ij} = P_i(a_j)$ est inversible, et que les quatre polynômes forment une base de T.

2° Soit :

$$P_1(x) = -\frac{1}{48}(x-3)(x-5)(x-7)\,;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{16}(x-1)(x-5)(x-7)\,;$$

$$P_3(x) = -\frac{1}{16}(x-1)(x-3)(x-7)\,;$$

$$P_4(x) = \frac{1}{48}(x-1)(x-3)(x-5)\,.$$

Calculer les valeurs $P_i(2j-1)$ pour i et j décrivant l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ et en déduire que P_1, P_2, P_3, P_4 forment une base de T, qu'on notera $\mathfrak{P}$.

3° Donner la matrice de passage D de la base canonique à la base $\mathfrak{P}$, puis calculer D^{-1} ; on calculera d'abord le déterminant de D.

4° *a.* Soit P le polynôme défini par :

$$P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)\,;$$

à tout polynôme K de $\mathbf{R}[x]$, on associe son reste $\hat{K}$ dans la division de K par P, suivant les puissances décroissantes; montrer qu'on a alors :

$$\hat{K}(x) = K(1).P_1(x) + K(3).P_2(x) + K(5).P_3(x) + K(7).P_4(x)$$

b. Retrouver, à partir de ce résultat, la matrice D^{-1}.

5° $S(x)$ étant un polynôme donné de $\mathbf{R}[x]$, on considère l'application u qui, à tout polynôme Q de T, associe $\widehat{Q.S}$.

a. Montrer que u est un endomorphisme de T.

b. Quelles sont les valeurs propres de u ? Ses vecteurs propres ?

c. Donner, sous forme d'un produit de trois matrices, la matrice de u dans la base canonique.

6° Soit les matrices :

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que : $(M - I)(M - 3I)(M - 5I)(M - 7I) = 0$.

7° Si P est le polynôme défini par : $P(x) = \sum_{i=0}^{i=3} a_i . x^i$, $a_i \in \mathbf{R}$,

on pose, par définition :

$$P(M) = \sum_{i=0}^{i=3} a_i M^i\,,\ \{M^0 = I\}\,;$$

soit alors $B_i = P_i(M)$ pour $i = 1\,;\,2\,;\,3\,;\,4$.

a. Exprimer I, M, M^2, M^3 comme combinaisons linéaires de B_1, B_2, B_3 et B_4.

b. Donner la table de multiplication des matrices B_1, B_2, B_3, B_4.

c. Montrer, sans plus de calcul, que ces quatre matrices ne sont pas régulières; montrer qu'elles sont diagonalisables.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail